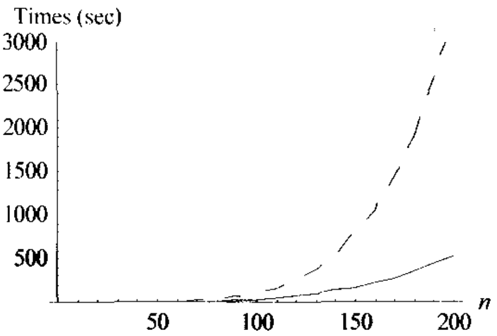

Рис. 8. Вычислительные эксперименты с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и алгоритма вычисления характеристического полинома в Mathematica 5.1 (пунктиром)

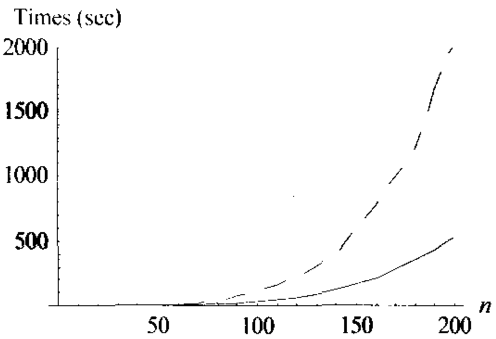

Рис. 9. Вычислительные эксперименты с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и алгоритма вычисления характеристического полинома в Maple 9.5 (пунктиром)

Подведем итоги. Самым быстрым для малых порядков матриц теоретически и практически является прямой алгоритм Сейфулина. Для матриц, у которых порядки меньше 200, самым быстрым является прямой алгоритм Сейфуллина, а для матриц, порядок которых более 200, самым быстрым является КТ-алгоритм с применением КТО. При этом КТ-алгоритм показывает хорошее согласие с графиком функции $t = k_1 n^4$, а алгоритм Сейфуллина – с графиком функции $t = k_2 n^5$.

Сравнение с алгоритмами, реализованными в системах Mathematica и MAPLE, оказывается не в пользу этих систем. Так, для матриц 200 порядка, характеристический полином которых вычисляется с помощью КТ алгоритма с применением КТО и прямым алгоритмом Сейфуллина за одинаковое время, они выигрывают в 6 раз по сравнению с алгоритмом, реализованным в системе Mathematica, и 3.8 раза – по сравнению с алгоритмом, реализованным в системе MAPLE.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малашонок Г.И.* A computation of the characteristic polynomial of an endomorphism of a free module / Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 258. С. 101-114.
2. *Переславцева О.Н.* Оценка числа бит-умножений в алгоритмах вычисления определителя, характеристического полинома и присоединённой матрицы // XI Державинские чтения. Тамбов, 2006. С. 79-83.
3. *Переславцева О.Н.* История и современное состояние теории алгоритмов вычисления характеристического полинома матрицы // Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики: междунар. науч. конф. Тамбов, 2006. С. 130-134.
4. *Сейфуллин Т.Р.* Вычисление определителя, присоединённой матрицы и характеристического полинома без деления // Кибернетика и системный анализ. 2002. №5. С.18-42.
5. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
6. Jounaïdi Abdeljaoued THÈSE «Algorithmes rapides pour le Calcul du Polynôme Caractéristique. Grade de docteur de l'Université de Franche-Comté, 22 mars 1997.
7. *Chistov A.L.* Fast parallel calculation of the rank of matrices over a field of arbitrary characteristic Proc. FCT '85. Springer Lecture Notes in Computer Science 199. 1985. PP. 147-150.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ, проект 04-07-90268.

Поступила в редакцию 19 октября 2006 г.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

© Г.И. Малашонок, А.А. Бетин

Malashonok G.I., Betin A.A. On calculation of complex radicals of polynomials.

Приближенное вычисление корней полиномов является одной из важных задач вычислительной математики. Мы предлагаем алгоритм вычисления комплексных корней полиномов с любой требуемой точностью, при этом используются только рациональные вычисления и алгоритмы вычисления действительных корней полиномов с действительными коэффициентами с требуемой точностью.

Рассмотрим полином над полем комплексных чисел

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n z + a_{n+1} \quad (1)$$

Задача состоит в нахождении всех корней уравнения

$$f(z) = 0 \quad (2)$$

с заданной точностью E, где E – это максимальная по модулю ошибка вычисления действительной и мнимой части каждого корня.

Выделим у коэффициентов и неизвестного $z = x + iy$ действительную и мнимую части и представим функцию $f(x)$ как сумму ее действительной и мнимой части. Тогда задача сводится к решению системы уравнений, которая получена приравниванием действительной и мнимой части полинома к нулю.

Обозначим

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \varphi_0(x, y),$$
$$\mathrm{Im}(f(z)) = \varphi_1(x, y).$$

Тогда система будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_0(x, y) = 0, \\ \varphi_1(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) – это система, состоящая из 2-х алгебраических уравнений с 2-мя неизвестными.

Рассмотрим идеал $Id = (\varphi_0, \varphi_1) \subset R[x, y]$, порожденный φ_0 и φ_1. Каждое решение системы (3) обращает в ноль любой элемент идеала Id. Построим такие полиномы, которые лежат в этом идеале и содержат только одну переменную x или y. Тогда x компоненты всех решений системы (2) будут находиться среди корней первого полинома, а y компоненты – среди корней второго полинома. Для нахождения таких полиномов можно воспользоваться алгоритмом вычисления последовательности полиномиальных остатков [1–2].

Будем считать, что y – старшая переменная и будем рассматривать полиномы в кольце $R[x][y]$. Обозначим через $\deg_y f$ степень полинома f по переменной y. Пусть, для определенности, $\deg_y \varphi_1$ не превосходит $\deg_y \varphi_0$. Тогда можно построить последовательность полиномиальных остатков по следующей схеме:

$$\alpha_1\varphi_0 + \beta_1\varphi_1 = \varphi_2,$$
$$\alpha_2\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 = \varphi_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_m\varphi_{m-1} + \beta_m\varphi_m = \varphi_{m+1},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in R[x]$ выбираются так, чтобы выполнялось условие $\deg_y \varphi_i < \deg_y \varphi_{i+1}$ $I = 1, 2, \ldots, n$, $\deg_y \varphi_{n+1} = 0$.

Операция вычисления φ_i на шаге $i-1$ называется операцией псевдоделения [1–2]. Не трудно видеть, что найденные таким образом φ_i находятся в Id.

Рассмотрим

$$\varphi(x)_{n+1=0}. \qquad (4)$$

Все действительные части корней уравнения (2) находятся среди корней уравнения (4).

Аналогично можно поступить, считая x старшей переменной и рассматривая φ_i в $R[y][x]$.

В результате новой серии псевдоделений получаем уравнение

$$\varphi(y)_{s+1} = 0, \qquad (5)$$

где $\varphi(y)_{s+1} \in R[y]$. Среди корней уравнения (5) находятся все мнимые части корней уравнения (1).

Составим все возможные пары чисел (x_j, y_k), из корней уравнений (4) и (5), при этом корни будем вычислять с точностью E. Тогда среди этих пар будут находиться все решения системы (2) с требуемой точностью.

Определим функцию, характеризующую погрешность вычисления пар (x_j, y_k) следующим образом:

$$err(x_j, y_k) = |\varphi_0(x_j, y_k)| + |\varphi_1(x_j, y_k)|. \qquad (6)$$

Выбрав n пар чисел (x_j, y_k), для которых $err(x_j, y_k)$ принимает наименьшие значения, находим корни уравнения (1) $z = x_j + iy_k$. При этом, если все корни уравнения (1) простые, то получаем n различных корней уравнения (1), в противном случае получаем n корней уравнения (1) с учетом их кратности.

Если коэффициенты исходного полинома являются действительными числами, то найденные корни будут действительными или комплексно сопряженными. Выбирая пары комплексно сопряженных корней, получим квадратичные сомножители в разложении на множители данного полинома. Действительные корни будут соответствовать линейным сомножителям. Тем самым будет получено разложение полинома над полем действительных чисел на неприводимые сомножители [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями. М.: Мир, 1994.
2. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллизина, Р. Лооса. М.: МИР, 1986.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 1-3.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана грантом РФФИ 04-07-90268б.

Поступила в редакцию 19 октября 2006 г.